Lösungen der Klausuraufgaben

Aufgabe 1

a) Drehmoment:

$$T = rF = r\mu g M = 0.647\text{Nm}$$

b) Winkelbeschleunigung:

$$\dot{\omega} = \frac{T}{J} = \frac{r\mu g M}{\frac{2}{5}Mr^2} = \frac{2}{5}\mu\frac{g}{r} = 22.3\frac{1}{\text{s}^2}$$

c) Beschleunigung:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{\mu g M}{M} = \mu g = 0.981\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

d) Translations- und Oberflächengeschwindigkeit sind:

$$\begin{aligned} v_{tr} &= v_0 - at \\ v_O &= r\omega(t) = r\dot{\omega}t \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt t:

$$\begin{aligned} v_0 - at &= r\dot{\omega}t \\ t &= \frac{v_0}{r\dot{\omega} + a} = 1.46 \text{ s} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Die Tragkraft ist die Differenz zwischen Auftriebs- und Gewichtskraft:

$$F = F_A - F_g = \rho_L gV - \rho_{He} gV = (\rho_L - \rho_{He})gV$$

Die Dichten ergeben sich aus dem idealen Gasgesetz:

$$\begin{aligned} pV &= Nk_BT \\ \rho &= m\frac{N}{V} = m\frac{p}{k_BT} \end{aligned}$$

Mit T=300 K, p=10^5 Pa und den angegebenen Atom- bzw. Molekülgewichten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho_L &= 1.16 \ \frac{kg}{m^3} \\ \rho_{He} &= 0.16 \ \frac{kg}{m^3} \end{aligned}$$

Damit:

$$F = 196 \text{ N}$$

b) Mit dem idealen Gasgesetz gilt bei Änderung von Druck und Temperatur:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_0} &= \frac{p_0}{p_1}\frac{T_1}{T_0} \\ \frac{\rho_1}{\rho_0} &= \frac{p_1}{p_0}\frac{T_0}{T_1} \end{aligned}$$

In der Höhe dehnt sich sowohl das Helium als auch die Umgebungsluft aus. Für die Tragkraft gilt:

$$\begin{aligned} F &= (\rho_{1L} - \rho_{1He})gV_1 \\ &= (\frac{p_1}{p_0}\frac{T_0}{T_1}\rho_{0L} - \frac{p_1}{p_0}\frac{T_0}{T_1}\rho_{0He})\frac{p_0}{p_1}\frac{T_1}{T_0}V_0 \\ &= (\rho_{0L} - \rho_{0He})gV_0 = 196 \text{ N} \end{aligned}$$

Es ergibt sich das identische Ergebnis wie bei a) (das ließ sich natürlich auch durch tatsächliche Berechnung des neuen Volumens und der Dichten erhalten)
c) Für den Druck unter Wasser gilt:

$$p = p_0 + \rho_W gh = 1.08 * 10^6 \text{Pa}$$

Das Volumen des Ballons ist dann:

$$V = \frac{p_0}{p}V_0 = 1.85 \text{ m}^3$$

Die Dichte des Heliums:

$$\rho_{He} = m\frac{p}{k_B T} = 1.74 \ \frac{kg}{m^3}$$

Tragkraft:

$$F = (\rho_W - \rho_{He})gV = 18117 \text{ N}$$

Aufgabe 3

a) Kreisfrequenzvektor:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.3 * 10^{-5} 1/s \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_0 \sin\alpha \\ 0 \\ v_0 \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \text{ m/s} \\ 0 \\ 0.66 \text{ m/s} \end{pmatrix}$$

b) Coriolisbeschleunigung:

$$\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega v_0 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.1 * 10^{-4} \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$a_C = 1.1 * 10^{-4} \text{ m/s}^2$$

c) Es ist

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}_C\, t^2 = \begin{pmatrix} -v_0 t \sin\alpha \\ 0 \\ v_0 t \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega v_0 t^2 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Stein legt die Strecke in $t = l/v_0 = 25$ s zurück; damit ist die senkrechte Abweichung von der geraden Linie

$$y(25 \text{ s}) = 3.4 \text{ cm}$$

Die Abweichung erfolgt nach Osten, also nach "rechts".

Aufgabe 4

a) Die Arbeit ist

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{V} p dV = \int_{V_0}^{V} \frac{Nk_BT}{V} dV = Nk_BT \ln \frac{V}{V_0} \\ &= 1722 \text{ J} \end{aligned}$$

b) Mit

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\gamma+1}$$

und $\gamma - 1 = 2/3$ ist die Temperatur nach der Kompression:

$$T = 2.5^{2/3} T_0 = 552 \text{ K}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} \Delta Q &= 0 \\ \Delta W &= \Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2} N k_B \Delta T = 3130 \text{ J} \end{aligned}$$

d) Die Entropie erhöht sich um:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = 5.74 \ \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Aufgabe 5

a) Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} (m_G + m_W) v_W &= m_G v_G \\ v_W &= \frac{m_G}{m_G + m_W} v_G = 3.92 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

b) Energieerhaltung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_W^2 &= mgh \\ h &= \frac{1}{2g} v_W^2 = 0.78 \text{ m} \end{aligned}$$

c) Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten der Berechunng. Z.B.: die Beschleunigung auf der schiefen Ebene ist $a = g \sin\alpha$, die zurückzulegene Strecke $l = h/\sin\alpha$. Die Zeit, die der Wagen braucht, um die Rampe wieder herunterzurollen, ist also

$$t_R = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha}} = 0.94 \text{ s}$$

Für das Hinaufrollen wird die gleiche Zeit benötigt;: dazu kommt zweimal die Zeit für die waagerechte Strecke. Die Gesamtzeit ist:

$$t = 2t_R + 2\frac{0.5m}{v_W} = 2.14 \text{ s}$$

Aufgabe 6

a) Der Druck im Behälter wird erzeugt durch den Außendruck plus dem Druck durch die Masse:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} = 1.006 * 10^5 \text{ Pa}$$

(mit $A = \pi r^2$)
b) Zunahme der Kraft:

$$dF = Adp = A(-\frac{1}{\kappa}\frac{dV}{V_0}) = -\frac{A^2}{\kappa V_0}dh$$

Mit $\kappa = 1/\gamma p$ also

$$dF = -\frac{7}{5}\frac{pA^2}{V_0}dh$$

c) aus dem Vergleich mit

$$F = -Dx$$

folgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{7}{5}\frac{pA^2}{mV_0}}$$

d) Damit ist (mit $\omega = 5.7$ 1/s):

$$V_0 = \frac{7}{5}\frac{pA^2}{m\omega^2} = 0.0053 \text{ m}^3 = 5.3 \text{ l}$$

Aufgabe 7

a) Wellenlänge

$$\lambda = 2l = 2m$$

b) Frequenz

$$f = \frac{c_L}{\lambda_L} = 2615 \ \frac{1}{s}$$

c) Schallgeschwindigkeit

$$c = \lambda f = 5231 \text{ m/s}$$

Aufgabe 8

a) Für die Parabel in y-Richtung ($z = ay^2$) folgt aus

$$\begin{aligned} a(4m)^2 &= 2m \\ a &= \frac{1}{8m} \end{aligned}$$

Damit ist das Potential:

$$V(x,y) = mgz = mgay^2 = 123\frac{J}{m}y^2$$

b) Aus dem Vergleich mit dem harmonischen Potential

$$V = \frac{1}{2} D y^2$$

folgt

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2mga}{m}} = \sqrt{2ga} = 1.57 \frac{1}{s}$$

c) Der Ortsvektor ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ \frac{v_y}{\omega} \sin \omega t \\ a(\frac{v_y}{\omega} \sin \omega)^2 \end{pmatrix}$$